



TITLE:

流れによる粒状体中の空洞領域の成長 (複雑流体の数理III)

AUTHOR(S):

佐野, 理; 金子, 吉文; ラジャセカール, G.P.

CITATION:

佐野, 理 ...[et al]. 流れによる粒状体中の空洞領域の成長 (複雑流体の数理III). 数理解析研究所講究録 2003, 1305: 203-213

ISSUE DATE:

2003-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42797>

RIGHT:

流れによる粒状体中の空洞領域の成長

東京農工大学・工学部 佐野 理(Osamu Sano)

金子吉文(Yoshifumi Kaneko)

G.P. ラジャセカール(G.P. RajaSekhar)*

Tokyo University of Agriculture and Technology,

*Indian Institute of Technology, Kharagpur, India

1. はじめに

土砂崩れ, なだれ, 土手の崩壊や崖崩れ, 火山の泥流などの災害はいずれも流体と固体粒子群の相互作用を含み, 固液の相変化や, ミクロでゆっくりした変形とマクロで急激な変化を伴っている. ここでわれわれの対象とする系について若干の説明を加えておく. 通常使われている類似の系である多孔性媒質では, 構成粒子の相対位置が固定しており, またサスペンションでは流体中に分散した粒子群の挙動や系全体の物性を扱うが, 一般に粒子の固化するような相変化は対象としていない. 粉体では主として気体中でのきわめて微小な固体粒子群を扱う. したがって, 流体中に固体粒子が充分高濃度で存在し, 固体としての力学的平衡状態と流動状態を行き来し, ミクロには離散的な粒子群であり, マクロには流体や弾性体・塑性体のような連続体とみなせる媒質を「粒体」という呼び方をして区別する. 本稿では粒体に見られるメソスコピックな過程を実験的・数理的に考察するのが目的である. はじめに, 一様な粒体中に存在する固定空洞領域が一様粘性流に与える影響を考え, つぎに流れによって引き起こされる空洞境界の変形について述べる.

2. 粒体中の空洞領域の効果

2.1 円形空洞の効果

透水係数 k の一様粒体中に半径 R_0 の円柱状空洞があり, 無限遠では定常で一様な速さ U の粘性流が流れているとする. 流れの方向を x 軸に選ぶ.

(i) この問題に対して, 空洞内部を透水係数 K の多孔性媒質であると仮定して空洞内外のいずれの流れもダルシー法則に従って計算し, 後に空洞内部の透水係数を無限大とする扱いがなされている. すなわち, 空洞内外の速度, 圧力, 応力をそれぞれ $\{v, p, \tau\}, \{V, P, T\}$ として

$$\text{空洞外部: } \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1a,b)$$

$$\text{空洞内部: } \mathbf{V} = -\frac{K}{\mu} \nabla P, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2a,b)$$

$$\text{境界条件：無限遠で } \mathbf{v} = (U, 0), \quad p = -\frac{\mu}{k} Ux + \text{const.} \quad (3a, b)$$

$$\text{空洞境界}(r=R_0)\text{で } v_n = V_n, \quad \tau_n = T_n \quad (4a, b)$$

ただし、添字 n は法線成分を表わす。この解は

$$\begin{aligned} v_r &= U_\infty \left(1 + \frac{A}{r^2}\right) \cos \theta, & V_r &= a U_\infty \cos \theta, \\ v_\theta &= -U_\infty \left(1 - \frac{A}{r^2}\right) \sin \theta & V_\theta &= -a U_\infty \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$A = \frac{K-k}{K+k} R_0^2, \quad a = \frac{2K}{K+k}$$

であり、空洞中心での速度 U_0 は x 方向で $U_0 = \frac{2K}{K+k} U_\infty$ ，したがって、 $K \rightarrow \infty$ での速さ U_0 は $2U_\infty$ となる。同様の計算を、一様粒体中に置かれた半径 R_0 の球形空洞に対して行なうと、空洞中心での速度は $U_0 = \frac{3K}{2K+k} U_\infty$ となる。したがって $K \rightarrow \infty$ での速さ U_0 は $\frac{3}{2}U_\infty$ となる。

(ii) 空洞を透水係数が無限大の多孔性媒質とみなすことは果たして妥当であろうか？ 空洞の内部が流体だけで占められていることを考えれば、そこでの遅い流れはストークス方程式で支配されるはずである。しかし、内部の支配方程式だけを変更したのでは、外部領域のダルシー方程式との整合性に問題が生じる。そこで、外部領域では一般化されたダルシー方程式¹⁻³⁾を用いることにする。したがって、

$$\text{空洞外部： } \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} - \frac{\mu}{k} \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6a, b)$$

$$\text{空洞内部： } \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7a, b)$$

$$\text{境界条件：無限遠で } \mathbf{v} = (U, 0)$$

$$\text{空洞境界}(r=R_0)\text{で } v_n = V_n, \quad v_t = V_t, \quad \tau_n = T_n, \quad \tau_t = T_t \quad (8a, b, c, d)$$

ただし、添字 n, t はそれぞれ法線、接線成分を表わす。これを解くと

$$\begin{aligned} \frac{v_r}{U_\infty} &= \left(1 + \frac{a_1}{\xi_0^2 r^2} + \frac{b_1}{\xi_0 r} K_1(\xi_0 r)\right) \cos \theta, & \frac{V_r}{U_\infty} &= \left(\frac{c_1}{8} r^2 + d_1\right) \cos \theta, \\ \frac{v_\theta}{U_\infty} &= -\left(1 - \frac{a_1}{\xi_0^2 r^2} + b_1 K_1'(\xi_0 r)\right) \sin \theta, & \frac{V_\theta}{U_\infty} &= -\left(\frac{3c_1}{8} r^2 + d_1\right) \sin \theta, \\ \frac{p}{\mu U_\infty / R_0} &= \left(-\xi_0^2 r + \frac{a_1}{r}\right) \cos \theta & \frac{P}{\mu U_\infty / R_0} &= c_1 r \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。ここで、 $\xi_0 = \frac{R_0}{\sqrt{k}}$ ， $\Delta = 4\xi_0 K_0 + (\xi_0^2 + 16)K_1$ ，

$$a_1 = \xi_0^2 \left[\frac{4\xi_0 K_0 + (\xi_0^2 + 8)K_1}{\Delta} \right], b_1 = -\frac{8\xi_0}{\Delta}, c_1 = -\frac{8\xi_0^2 K_1}{\Delta}, d_1 = \frac{8\xi_0 K_0 + (3\xi_0^2 + 16)K_1}{\Delta}, \quad (10)$$

である。 ξ_0 は粒体を構成する粒子の間隙 ($\sim \sqrt{k}$) に対する空洞の半径を表わす⁴⁾。

図1に空洞近傍の流れの様子を示す。(a)は $\xi_0=1$ の場合で、この時には空洞の大きさは粒子間隙と同程度なので流れはほとんど影響を受けない。これに対して(b) $\xi_0 \gg 1$ の場合には空洞の影響が顕著であり、空洞にはそれがなかったときの流量 Q_∞ の2倍の流量 Q_0 が流れ込む。

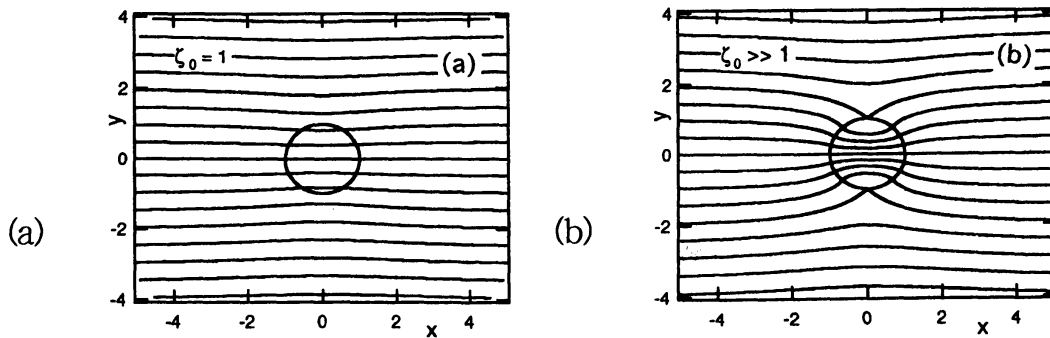


図1. 空洞近傍の流れ. (a) $\xi_0=1$, (b) $\xi_0 \gg 1$.

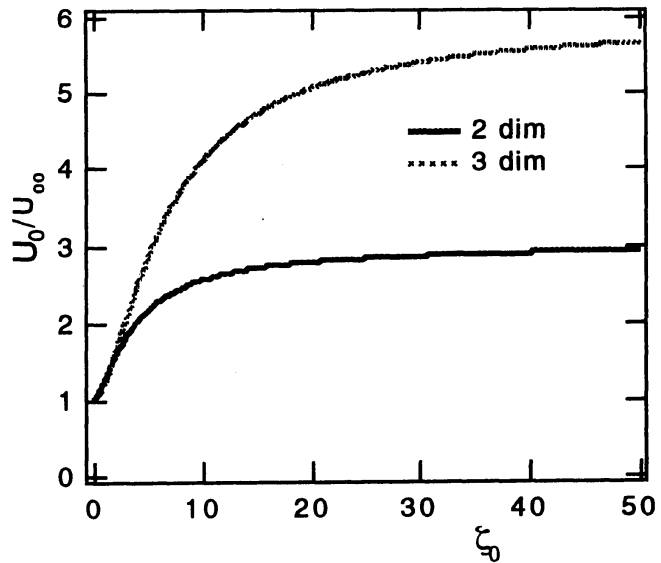


図2. 空洞中心での速度.

図2に空洞中心での速度 U_0 を示す。 ξ_0 の増加に伴い、 U_0 は U_∞ の3倍に近づいていく。同様の計算を球形空洞の場合について計算すると、 ξ_0 の増加に伴い、流量 Q_0 は Q_∞ の3倍に、 U_0 は U_∞ の6倍に近づいていく⁵⁾。

以上の結果は、(i)の場合と定量的にかなり異なることを示しているが、(ii)の結果の方が正しいことは実験により確認されている^{6,7)}。これは地下水流速調査の際にボーリング孔内部の流速を測り、それから自然状態での流速を推定する場合に大きな補正が必要であることを示している。

ここまでは、空洞が真円であるとしてその効果を計算したが、もしそれが円から外れていたらどの程度流れに影響するであろうか？ また、幾つかの空洞が隣接していたらその干渉効果はどうなるであろうか？

2.2 空洞の微小変形の影響

空洞の形が円形からわずかにずれている場合を計算してみよう。空洞の形を

$$r = R_0 \{ 1 + \varepsilon \cos[m(\theta - \theta_0)] \} \quad (11)$$

とする。ただし、 $\varepsilon \ll 1$ で、 m (整数)と θ_0 は与えられた定数とする。計算の詳細は原論文^{8,9)}に譲り、いくつかの例を図3に示そう。

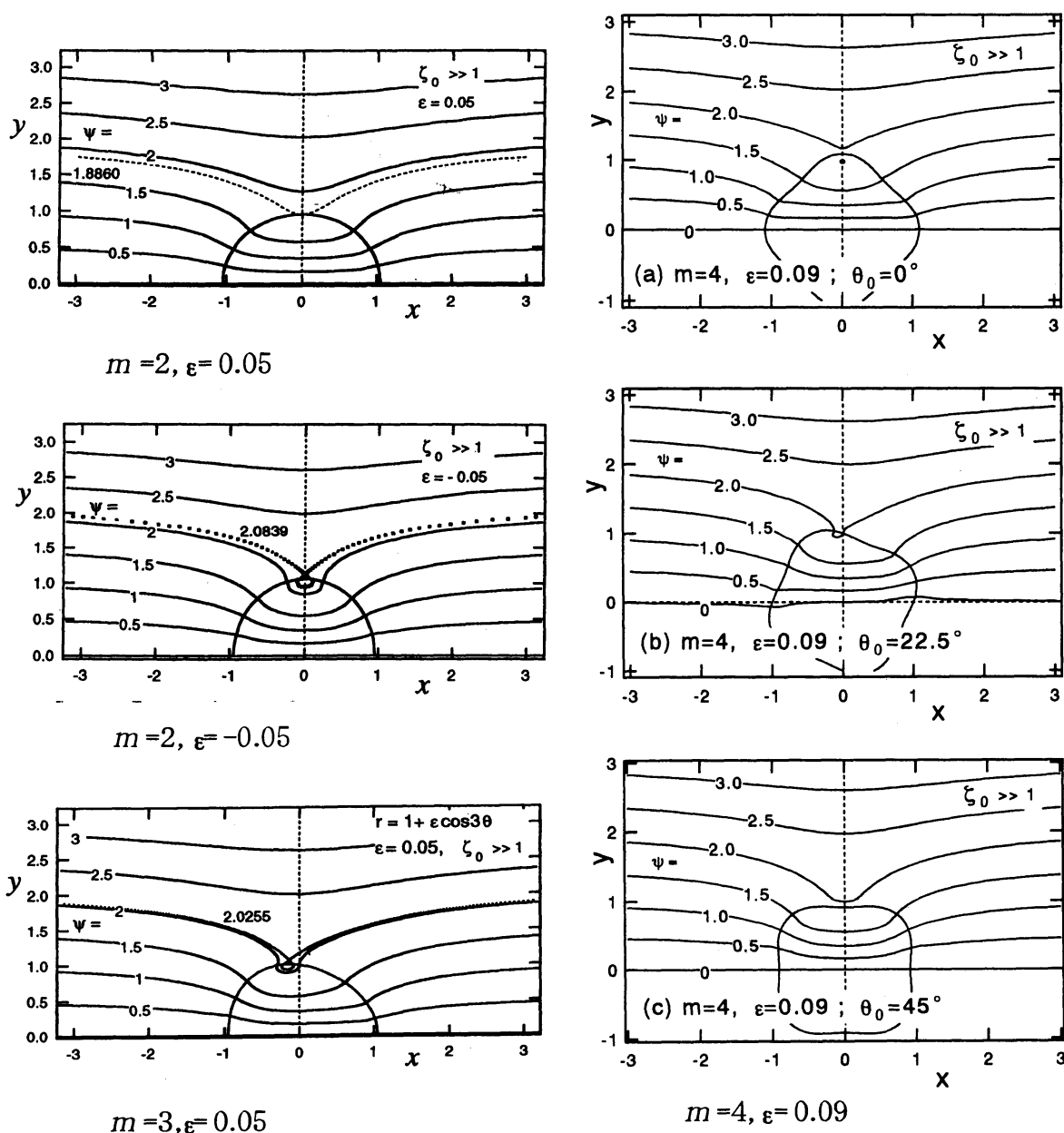
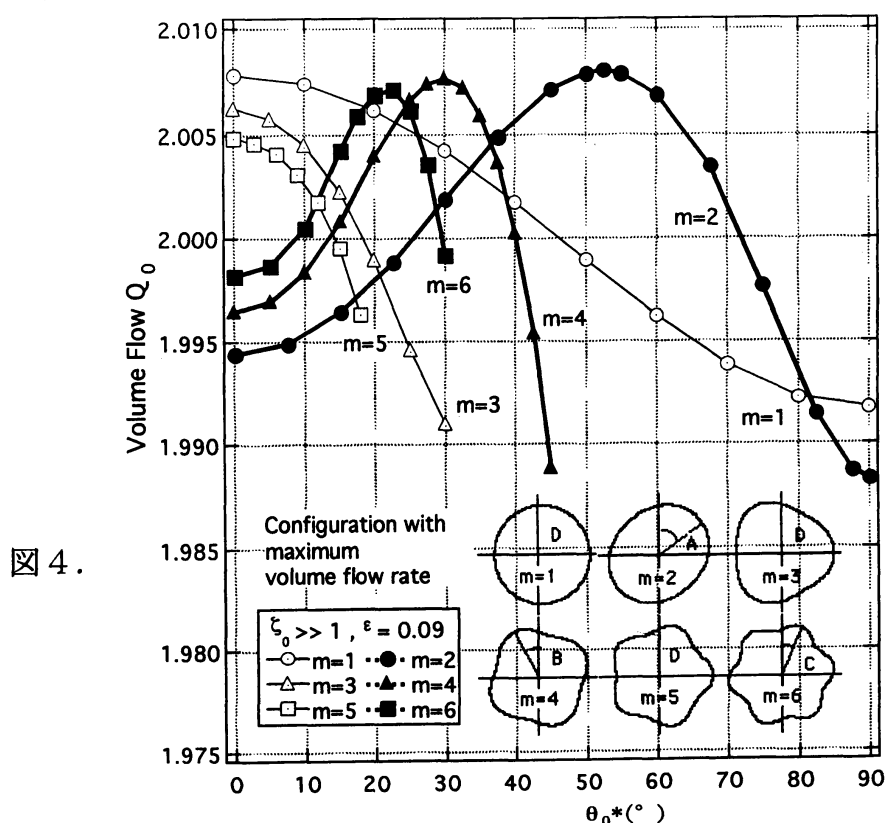


図3. 空洞の微小変形と流線.

空洞へ流れ込む流量が空洞の形や向きにどのように依存するかを図4に示す。

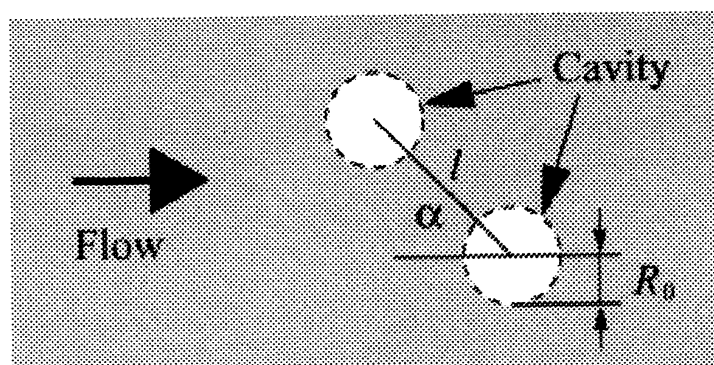


流量の増減はいずれも ϵ のオーダーであるが、流量や中心での流速が最大になる形や向きがあること、なども示される。詳しくは原論文参照。

2.3 2個の円形空洞の相互作用

つぎに、空洞が複数個存在するときの干渉効果を調べよう。最も簡単な配置として半径の等しい2個の円形空洞を考える。空洞の中心間距離を l ，中心を結ぶ線分と流れとの角度(迎え角)を α として、流量の l ， α 依存性に着目する。

図5. 2個の円形空洞の配置.



理論的な計算は特別な配置でしか与えられていないので¹⁰⁾，足りない部分は実験結果を用いる。流線の一例を図6に示す¹¹⁾。ここで $l^* = l/R_0$ である。

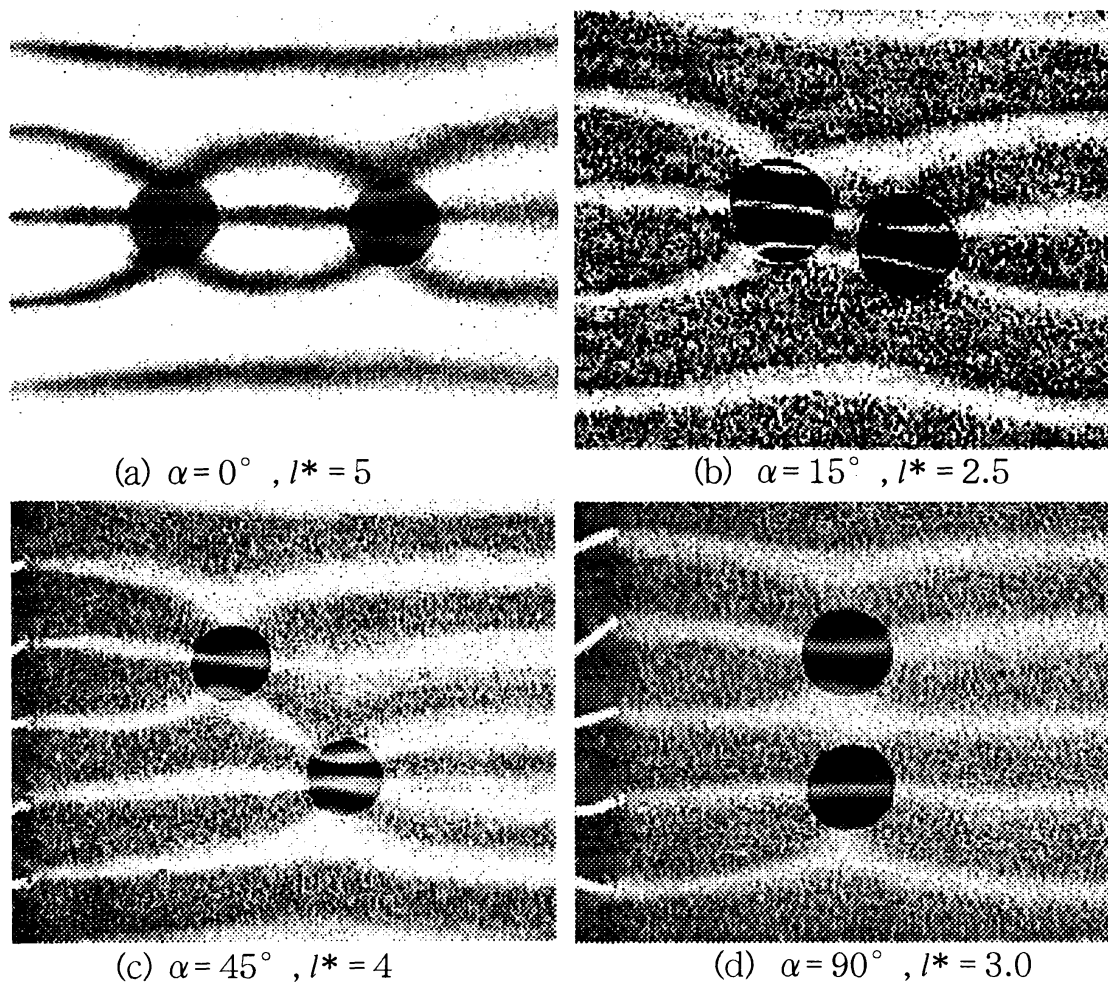
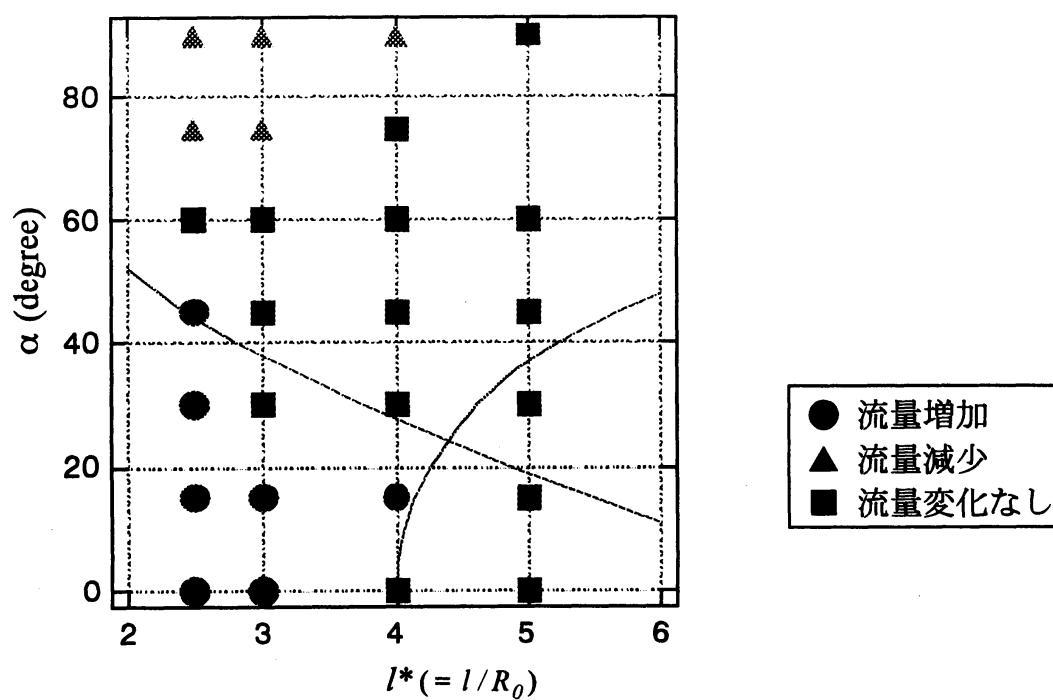


図6. 2空洞の周りの流線.

図7. 流量の流量の l , α 依存性.

結果をまとめたものが図7である．図8aのように α と l の小さい場合には，上流側の空洞で集められた流量の一部が下流側の空洞にも流れ込むので流量は増加する．これに対して図8bのように2つの空洞に流れ込む流体領域がオーバーラップした場合には，その1/2ずつがそれぞれの空洞に分かち与えられるので，それぞれに流れ込む流量は減少する．

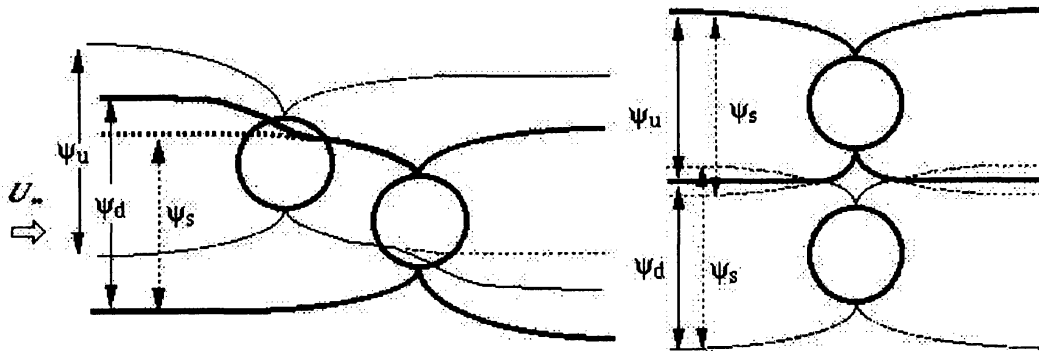


図8．2空洞の干渉の概念図．(a) 流量の増加，(b) 流量の減少．

3. 流れによる粒体中の空洞領域の変形と成長

3.1 流れによる空洞崩壊

前節までは，空洞の境界を固定していたが，もしそうでないと，流れによって境界が崩される可能性がある¹²⁾．§2.2(ii)で求めた流れでは，円形空洞の境界上での応力の法線成分は

$$\tau_n \propto U_0 \cos \theta \quad (12)$$

となっている．一般に粒体では凝集力が弱いので，正の法線応力に対しては強固であっても，負の法線応力には抗しきれず，境界に面した粒から順に剥離していく．

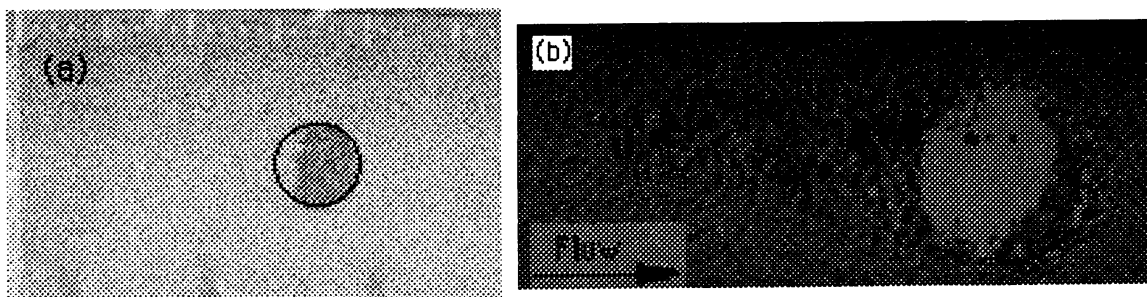


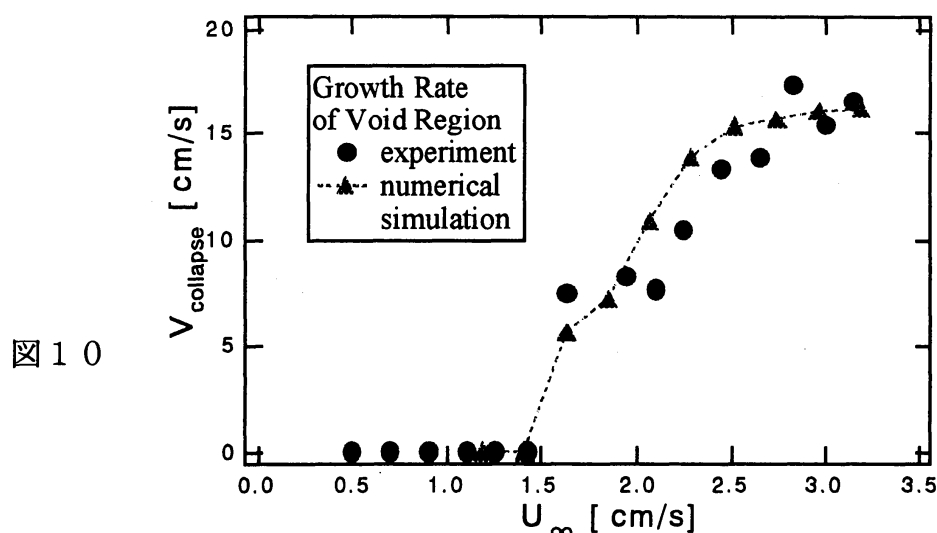
図9．空洞の崩壊過程（流れは左から右へ）：

(a) $t = 44$ s での空洞の変形，(b) $t = 0$ s と $t = 50$ s での差引画像．

図9は粒子の直径1mm，空洞直径48mm，無限遠流速3.0cm/sとした実験の一例である．図9(a)は44秒後の写真に初期の円形空洞輪郭を重ねたものである．空洞の上流側が崩壊していること，とくに $\theta = 180^\circ$ 付近の崩壊量が最大であること，下流側空洞境界は崩壊していないこと，などの理論的予測をほぼ反映した結果になっている．図9(b)は50秒後の画像から初期画像を差引したものである．空洞上流側には崩

壊部分が「膨張」するように伸び、崩された粒子は下流側空洞表面まで運ばれて堆積していく。流体中を上昇する(やや大きい)気泡の運動は、密度の高い媒質中を空洞が移動する点では類似の現象であるが、前方の輪郭がシャープで後方が不安定に崩れたものとなるなどの点では粒体の場合と大きく異なる。

図9の例は空洞を過ぎる流れが崩壊を引き起こす応力を超えた場合になっていた。つぎに、空洞崩壊の速さと流れの大きさの関係を図10に示す。



すぐ分かるように、流れの大きさがある臨界値 U_c に達するまで空洞は崩壊しない。これは、媒質の凝集力(これを「粒体の堅さ」 g と呼ぶことにする)が流れによる応力よりも大きいことに対応している。他方 U が U_c を超えると崩壊速度は流れの大きさの増加に伴い単調に増加していくように見える。

3.2 空洞の相互作用と崩壊

前節の結果を総合すると複数の空洞の干渉について興味深い結果が予測される。§2.1(ii)でも見たように、空洞が存在していると流れはそこに集中する傾向があるので、その下流側の流速は無限遠流速よりも大きくなる。したがって、もとの流速が U_c 以下でも空洞の下流側の空洞が崩壊する可能性がある。これを実験的に確認したものが図11である。

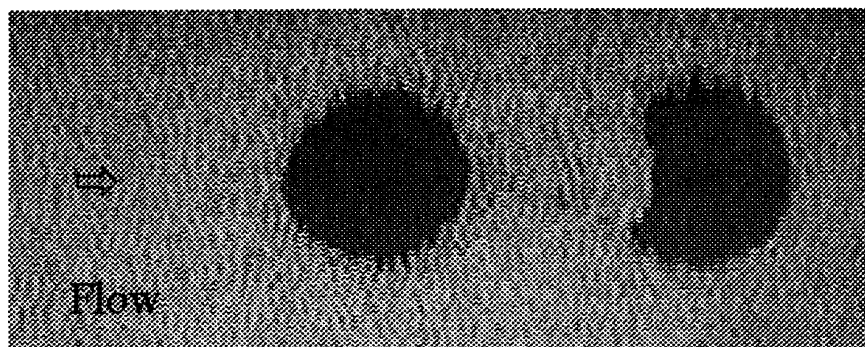


図11. 流れに沿って置かれた2空洞の干渉(流れは左から右へ)。

図 1 1 は流れの方向に 2 つの空洞を並べ、図 1 0 に示した臨界流速 U_c 以下の流れを与えた場合で、上流側の空洞は何ら変形が見られないのに、下流側の空洞が崩壊している様子を示している。流体中で流れに沿って 2 つの物体を隣接して並べたときに、下流側の物体は上流側の物体の作る伴流に入るので抵抗が減るのと対照的である。

3.3 数値シミュレーション

さらに多数の空洞が存在している場合をセル・オートマトンのようなシミュレーションで調べてみよう。ここでは正三角格子を用い、各格子点は粒子か流体(空格子)のいずれかが占めている。粒子は流れによって移動するが、全個数は保存される。粒子移動の規則は以下のように与える。

- (1) 初期条件(ほぼ円形に近い空洞領域)を与える。
- (2) 境界上にある格子点を登録する。ここで境界点とは固体粒子で完全に囲まれてはいないものを指す。
- (3) 境界点ごとに“ポテンシャル”の勾配を計算し、大きい順に登録する。
ただし、1 空洞の解析結果を踏まえ、まず空格子で $\cos \theta$ 型のポテンシャルを与え、つぎに境界点ごとに最近接格子からのポテンシャルを重ね合わせる。
各境界点で 6 方向の勾配を計算する。
- (4) ポテンシャル勾配がある臨界値 g を超えたものについて、粒子移動を行なう。
その際、勾配の大きな順に実施し、移動方向の格子点が空の場合に限り移動させる。もし勾配の大きさが等しいときは確率的に順序を決める。
- (5) 流体中に孤立した固体領域が発生した時は、1 ステップあたり全体として 1 格子間隔ずつ下流側に平行移動させる。
- (6) ひとつとおり移動が終わったところで(2)に進む。

初期条件と粒体の堅さ g を与え、以上のステップを繰り返した一例を図 1 2 に示す。

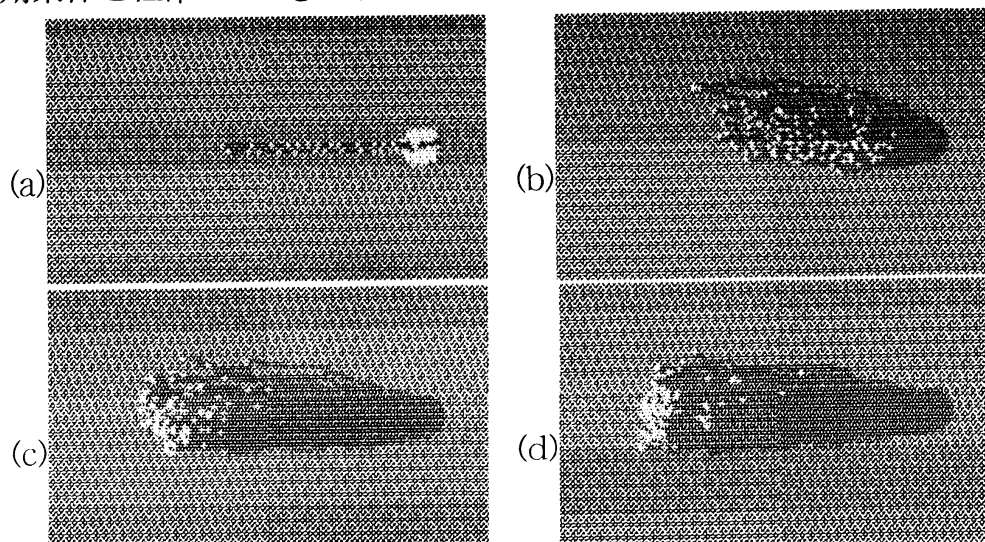


図 1 2. 粒体の堅さと空洞成長 : (a) $g = 14$, (b) $g = 12$, (c) $g = 7$, (d) $g = 3$.

実験での U_∞ の増加がシミュレーションでの g の値の減少に定性的に対応する程度の比較しかできないが、おおよその傾向は再現されている。まず粒体が充分堅ければ空洞は変形しない。 $g = 14$ (任意の単位) に達したところで空洞の最上流側にあつて負の法線応力の大きさが最大の境界付近だけが崩壊し、空洞は細長く上流方向に成長していく。 $g = 12$ では空洞の成長範囲は広がるが空洞は小さく分散して残されている。 $g = 7$ では空洞は全体として上流側に移動する。 $g = 3$ では空洞がほぼすべて前端に移動するが、そこで流れに対して垂直に広がろうとする傾向が見られる。計算で得られた空洞成長速度を図 10 に▲で示した。横軸の U_∞ を逆向きに g としてプロットしたもので定性的には一致している。

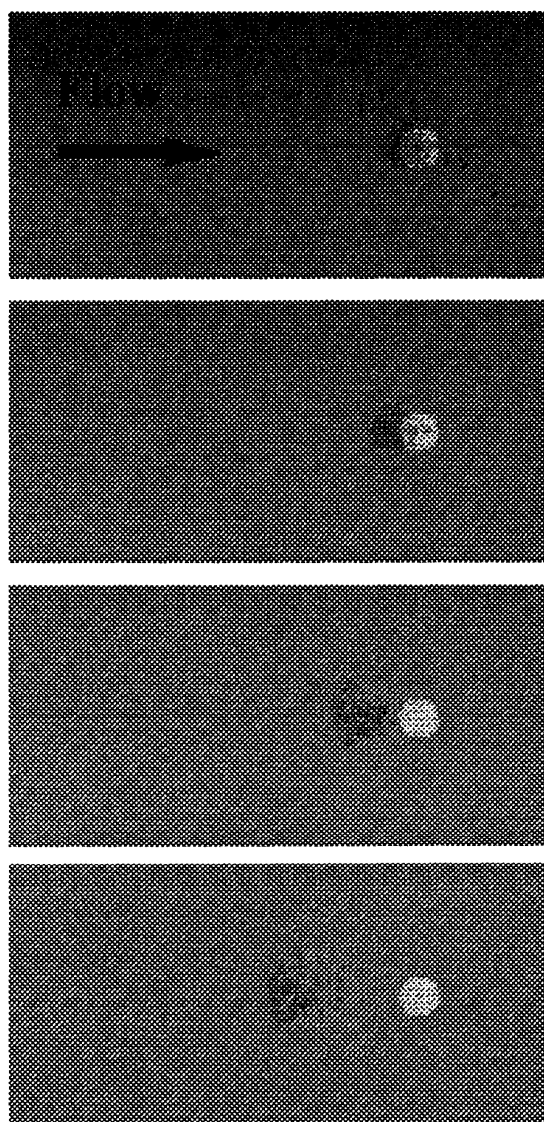


図 13. 1 空洞の成長.

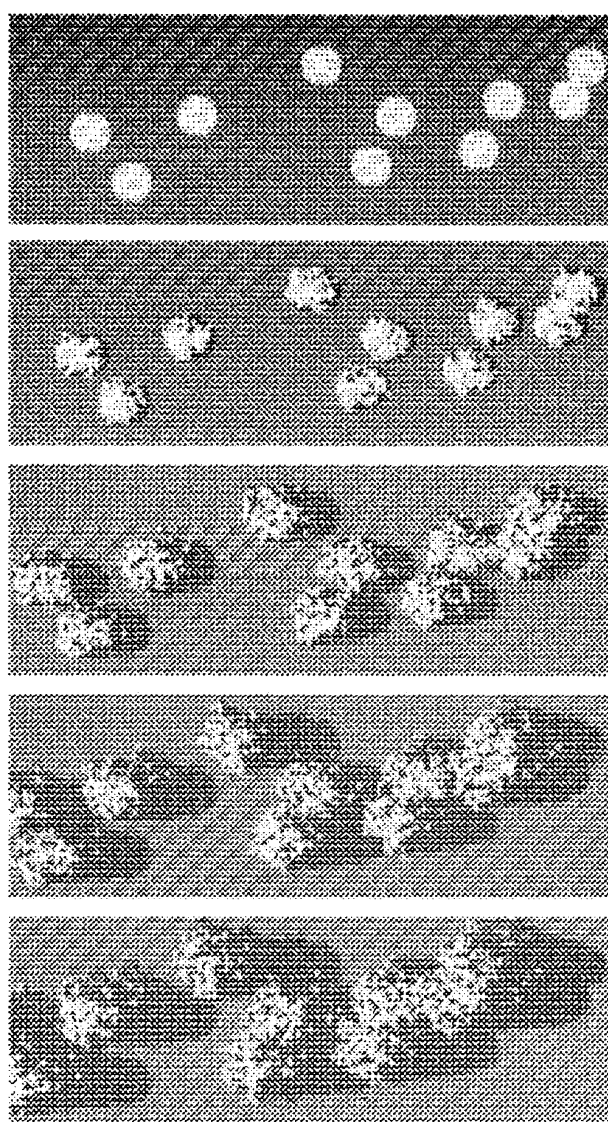


図 14. 多数の空洞の成長.

実験で観測された空洞成長の例は $g = 3 \sim 7$ に対応していると思われる。そこで $g = 5$ としたときの空洞の成長の様子を図 13, 図 14 に示す。いずれも流れは左から右

で、色の濃度の違いが粒体の移動部分である。図13は初期に円形だった1つの空洞の5, 10, 25, 50ステップ後の変形を、また図14では初期にランダムに配置された空洞群が成長・融合して長距離にわたって繋がった空洞に発展していく様子(上から0, 5, 20, 35, 45ステップ)をシミュレートしたものである。

4. 結論および考察

これまで我々は、一様な粒体中に空洞が存在するときにそれが流れに与える効果と、流れが引き起こす空洞境界の変形について述べてきた。前者については、例えばボーリング孔を開けて測定したデータに基づいて“孔をあけていない時の自然状態”での地下水流速を推定する方法への応用や、着目する井戸の周りに複数の孔を設置して井戸の流量を増加させる方法への応用などが考えられる。他方、後者については、多量の雨水の侵入による上下方向の浸透流や増水による川岸付近の水平方向の地下水流によって、粒体中に含まれる小さな空洞が成長・合併し長距離的な空洞へと発展した結果、自然災害が発生する可能性を示唆している。すなわち、空洞が細く伸びた場合には地下水脈が作られ、また空洞がシート状に発達した場合には、その両側の応力平衡が寸断されて地滑り、崖崩れ、土手の決壊などが生じる可能性を示している。研究はまだ端緒についたばかりであるが、粒体と流体の相互作用を詳細に調べることにより、ミクロでゆっくりした構造変化とマクロで急激な構造変化の関係が解明されることを期待している。

参考文献

- 1) H.C. Brinkman: *Appl. Sci. Res.* A1, 27 (1947).
- 2) C.K.W. Tam: *J. Fluid Mech.* 38, 537 (1969).
- 3) S. Childress: *J. Chem. Phys.* 56, 2527 (1972).
- 4) O. Sano: *Nagare* 2, 252 (1983)[in Japanese].
- 5) G.P. RajaSekhar & O. Sano: *J. Phys. Soc. Jpn.* 69, 2479 (2000).
- 6) K. Momii, K. Jinno, T. Ueda, H. Motomura, F. Hirano & T. Honda:
J. Groundwater Hydrol. 1, 13 (1989)[in Japanese].
- 7) K. Momii, K. Jinno & F. Hirano, : *Water Resour. Res.* 29, 283 (1993).
- 8) G.P. RajaSekhar & O. Sano: *Fluid Dyn. Res.* 28, 281 (2001).
- 9) G.P. RajaSekhar & O. Sano: to be published in *Phys.Fluids* 15, no.3 (2003).
- 10) H.Yano, A.Kieda & Mizuno: *Fluid Dyn. Res.* 7, 109 (1991).
- 11) Y.Kaneko & O.Sano: to be published in *Fluid Dyn. Res.* (2003).
- 12) O. Sano & G.P. RajaSekhar, : *Proc. Ninth Asian Cong. Fluid Mech.*
(Isfahan, Iran) 105 (2002).